

問題 I

以下の論理式が正しければ，間違っていれば×を答えよ．ただし， $\mathbf{Nat}$ は自然数全体からなる集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$ とする（0 が含まれることに注意）．

論理式	真偽
$\forall x \in \mathbf{Nat}. \forall y \in \mathbf{Nat}. \neg(y \geq x)$	×
$\forall x \in \mathbf{Nat}. \exists y \in \mathbf{Nat}. y > x$	
$\exists x \in \mathbf{Nat}. \forall y \in \mathbf{Nat}. x > y$	×
$\exists x \in \mathbf{Nat}. \forall y \in \mathbf{Nat}. ((\neg(y \geq x)) \rightarrow x > 1)$	
$\forall x \in \mathbf{Nat}. \forall y \in \mathbf{Nat}. (x \leq 0 \Rightarrow y \geq x)$	
$\forall x \in \mathbf{Nat}. \exists y \in \mathbf{Nat}. (x < 0 \Rightarrow y < 0)$	

解説 1 番の $\neg(y \geq x)$ の部分は， $y < x$ と等価．例えば $x = 0, y = 1$ とすれば成り立たないので×．

3 番目は，どんな x を選んでも， y として x を選べば $y > x$ は成立しないので×．

4 番目は， $x = 2$ とすれば， $x > 1$ が成り立つので，残りの部分には関係なく正しい．

5 番目は， $x \leq 0$ という前提から $x = 0$ なので，任意の y について $y \geq x (= 0)$ が成り立つ．

6 番目は，どんな x を選んでも， $x < 0$ という前提が偽なので， $x < 0 \Rightarrow y < 0$ は真．

問題 II

次の命題を論理式で表せ．

1. どんな自然数 x についても， $x = 2y$ または $x = 2y + 1$ を満たす自然数 y が存在する．

答： $\forall x \in \mathbf{Nat}. \exists y \in \mathbf{Nat}. (x = 2y \vee x = 2y + 1)$

2. ある自然数 x が存在して， x はどんな自然数 y よりも小さいか等しい．

答： $\exists x. \forall y. (x \leq y)$

問題 III

$X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ とする．以下の集合の要素を書き下せ．ただし，関係 $\leq$ は自然数に関する通常の大
小関係とする（つまり， $x \leq y$ は x が y 以下であることを表す）．

$X \cup Y$	0, 1, 2, 3
$X \cap Y$	1, 2
$X \times Y$	(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)
2^Y	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}$
$\{x \in X \mid \exists y \in Y. x \geq y\}$	1, 2
$\{x \in 2^X \mid 0 \in x\}$	$\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}$
$\leq \cap (X \times Y)$	(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)
$\{(0, 1), (1, 2)\}^*$	(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)

解説 $\{x \in X \mid \exists y \in Y. x \geq y\}$ は， X の要素 x のうち，ある Y の要素 y 以上のものからなる集合．
 $\{x \in 2^X \mid 0 \in x\}$ は， X の部分集合のうち，0 を要素に持つものの集合．

問題 IV

以下の集合が可算集合であるか否かを理由と共に答えよ．

- 文字 a と b のみからなる有限長の列の集合 … 可算集合
a, b を 0, 1 でおきかえ，先頭に 1 を追加したものを自然数の 2 進表示とみなせば，文字 a と b のみからなる有限長の列の集合から自然数の集合への単射が得られる．逆に自然数の 2 進表示の 0, 1 を a, b で置き換えれば自然数の集合から文字 a と b のみからなる有限長の列の集合への単射が得られる．
- 文字 a と b のみからなる無限列の集合 … 非可算集合
仮に可算集合だとすると，すべての無限列に $s_0, s_1, s_2, \dots$ と番号づけすることができる．ここで，文字列 s を

$$s(n) = \begin{cases} a & \text{if } s_n(n) \neq a \\ b & \text{if } s_n(n) = a \end{cases}$$

によって定義する（ $s(n)$ は s の n 番目の文字を表す）． s は a, b からなる無限列なので $s_m = s$ を満たす m が存在するが， $s_m(m) = a \Leftrightarrow s(m) = a \Leftrightarrow s_m(m) \neq a$ となり矛盾．よって文字 a と b のみからなる無限列の集合は非可算．

- C 言語のプログラムの集合 … 可算集合
プログラム中に使用できる文字の種類は有限，プログラムはそれらの有限列なので，(1) と同様．